УДК 519.642

М. Ю. Медведик

СУБИЕРАРХИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Аннотация. Рассмотрено решение интегрального уравнения, полученного из краевой задачи Коши для уравнения Гельмгольца. Представлен численный метод Галеркина. Получены численные результаты решения, задачи в двух случаях при $k \neq 0$ и $k = 0$ с использованием субиерархического алгоритма на плоских экранах произвольной формы.

Ключевые слова: субиерархический алгоритм, интегральное уравнение, численный метод, краевая задача.

Abstract. The initial value problem for Helmholtz equation is considered. The issue results in an integral equation. The integral equation is solved by Galerkin method. Numerical results of solving of are obtained by using subhierarchical algorithm by plane screen of arbitrary shape in two case: $k \neq 0, k = 0$.

Keywords: subhierarchical algorithm integral equations, numerical method, boundary value problem.

Введение

Рассмотрим распространение акустических волн в однородной изотропной среде в R^3 с плотностью ρ, скоростью распространения звука c и коэффициентом поглощения γ. Для определения волнового движения достаточно найти потенциал скоростей $U = U(x,t)$, из которого поле скоростей получается в виде

$$v = (1/\rho)\operatorname{grad} U,$$

а давление p – в виде

$$p - p_0 = -\frac{\partial U}{\partial t} - \gamma U,$$

где $U(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}$ p_0 – давление в невозмушенной среде.

В линеаризованной теории потенциал скоростей U удовлетворяет диссипативному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial U}{\partial t} - c^2 \Delta U = 0,$$

и, следовательно, для гармонически зависящих от времени акустических волн вида $U(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}$ с частотой $\omega > 0$ мы получим, что зависящая от координат амплитуда u удовлетворяет приведенному волновому уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

где волновое число $k \neq 0$, и имеем $k^2 = \omega(\omega + i\gamma)/c^2$. Выберем знак k так, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Im} k \geq 0$, это обеспечит нам существование единственности решения.

Рассмотрим рассеяние падающей волны u^i препятствием D. Тогда полная акустическая волна имеет вид $u = u^i + u^s$, где u^s означает рассеянную волну, и для акустически мягкого препятствия полное давление должно обращаться в нуль на границе, т.е. на границе $u^s = -u^i$. Задавая различные граничные условия на рассеивателе, мы приходим к различным акустическим задачам. Пусть задано значение величины u на границе рассеивателя, физически это соответствует заданию давления акустической волны, тогда мы приходим к задаче Дирихле. Аналогично, пусть задано значение нормальной производной u на границе, физически это соответствует заданию нормальной компоненты скорости волны, т.е. рассеянию на жестком препятствии, тогда мы приходим к задаче Неймана.

Рассмотрим задачу Дирихле на поверхности расположенной в R^3. Решение поставленной задачи эквивалентно решению интегрального уравнения вида

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y)dy = f(x). \tag{1}$$

Рассматриваемая задача имеет широкое применение результатов при проектировании антенн и печатных плат. Исследование в этой области привели к активному и успешному применению численных методов для решения аналогичных задач дифракции. Однако большинство авторов ограничивались решением задачи на экранах базовой формы. Наиболее часто в качестве экрана базовой формы выбирается некая плоская фигура, например квадрат, прямоугольник, треугольник или круг. Представленный в статье метод позволяет решать подобные задачи на экранах произвольной формы как на плоскости, так и в пространстве, опираясь на результаты, полученные при решении задачи на экране базовой формы [1–4].

Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная, незамкнутая поверхность в R^3 с границей γ ($\Omega = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3\right\}$). Будем искать функцию $u \in H^1_{\text{loc}}(M_S)$, что означает ограниченность энергии в любом конечном объеме пространства, удовлетворяющую на $M_S = R^3 \setminus \overline{\Omega}$ следующей краевой задаче для уравнения Гельмгольца:

$$\left(\Delta + k^2\right)u = 0 \;\; u \in M_S, \operatorname{Im} k \geq 0, \tag{2}$$

с краевыми условиями на функцию (задача Дирихле)

$$u = g \;\; u \in \Omega. \tag{3}$$

Для обеспечения единственности решения задачи необходимо, чтобы функция u удовлетворяла условию на бесконечности (условию Зоммерфельда):

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(r^{-1}\right), \; k \neq 0,$$

$$u = O\left(r^{-1}\right), \; k = 0, \; r = |x| \to \infty . \tag{4}$$

Справедливы теоремы о единственности решения задачи Дирихле в предположении, что оно существует [5].

Представим рассматриваемое интегральное уравнение в операторном виде:

$$Lu = f, \tag{5}$$

где L является интегральным оператором,

$$Lu = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) ds . \tag{6}$$

Введем пространства Соболева $H^s(\Omega)$ и $\tilde{H}^s\left(\overline{\Omega}\right)$. Для любого $s \in R$ рассмотрим интегральный оператор $L : \tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}\right) \to H^{1/2}(\Omega)$ [5, 6]. Данный оператор является эллиптическим и для него справедливы теоремы о сходимости проекционного метода.

Отдельный интерес представляет уравнение (1), когда $k \to 0$, так называемый статический случай. В этом случае уравнение принимает вид

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} u(y) dy = f(x) . \tag{7}$$

Для него также справедлива описанная выше теория.

Метод Галеркина

Рассмотрим n-мерное пространство V_n. Проведем аппроксимацию элементов ψ элементами $\psi_n \in V_n$. Методом Галеркина находим ψ_n из системы уравнений

$$(L\psi_n, v) = (f, v) . \tag{8}$$

Эти уравнения определяются конечномерным оператором $L_n : V_n \to V_n'$, где V_n' есть *антидуальное* пространство к V_n.

В качестве базисных функций $\psi(x)$ выберем функции

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } \; x \in \Pi_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{9}$$

Данные функции удовлетворяют условию аппроксимации в $\tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Каждый элемент матрицы получается путем вычисления четырехкратного интеграла

$$L_{i,j} = \int_{\Omega} G(x,y)\psi_i(x)\cdot v_j(y)ds,$$

имеющего слабую особенность в области интегрирования. Процедура избавления от особенности представлена в [8]. Правая часть матричного уравнения задается формулой

$$f_j = \int_{\Omega} f\psi_j ds .$$

Здесь $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, а $G(x,y)=\dfrac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ – известная функция, а для случая $k\to 0$ $G(x,y)=\dfrac{1}{|x-y|}$. Решение СЛАУ осуществлялось методом сопряженных градиентов.

Аналитические решения

Для случая плоского экрана при $k=0$ для задачи Дирихле удалось получить аналитические решения для различных правых частей (табл. 1).

Таблица 1

Правая часть $g(\rho,\varphi)$	Решение $\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}\right](\rho,\varphi)$
1	$\dfrac{4}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}$
ρ	$1+\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}+\dfrac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)}-2\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)$
$e^{-i\varphi}$	$\left(\dfrac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)}+\dfrac{1}{\rho}\right)e^{-i\varphi}$
$\rho^2 e^{-i\varphi}$	$\dfrac{3}{2}\left(\rho+\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}+\dfrac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)}-2\rho\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)\right)e^{-i\varphi}$

Субиерархический алгоритм

Разобьем куб с размером сторон равной длине волны на равномерные кубики. Будем предполагать, что маленькие кубики внутри являются пустыми, а поверхность каждого кубика является бесконечно тонким экраном. Описанную выше фигуру будем называть в дальнейшем экраном канонической формы. Численное решение поставленной задачи Дирихле для экрана канонической формы строится с помощью метода Галеркина. Рассмотрим алгоритм построения решения для задачи дифракции на экранах произвольной неплоской формы. Будем предполагать, что в нашем распоряжении находится базовая матрица, составленная при решении задачи Дирихле на экране канонической формы одним из проекционных методов. Для решения задачи дифракции на экране сложной формы необходимо, чтобы данная поверхность целиком принадлежала экрану канонической формы, для которого матрица уже насчитана. Субиерархический метод позволяет построить матрицу для фигуры сложной формы, пользуясь элементами посчитанной матрицы, составленной при решении задачи на экране канонической формы. Следует заметить, что метод работает и в случае использования в качестве базового экрана не только канонической формы. В этом случае на экран сложной конфигурации налагается то же условие, что и раньше, он должен целиком принадлежать базовому экрану. В построенной фигуре введем новую нумерацию вершин. Скорость построения новой матрицы будет напрямую зависеть от размера экрана и количества вершин в сетке. Произведя полный перебор вершин, получаем новую сетку. Эту сетку будем использовать для расчета поля на отверстии сложной формы. Таким образом, один раз решив задачу на экране базовой формы, мы можем использовать полученные результаты для решения серии задач на экранах сложной геометрической формы. Данный подход имеет большое практическое значение в инженерных расчетах.

Параллельный подход

Рассматриваемая задача требует составления матрицы как можно большего размера, что требует больших затрат времени. Для минимизирования временных затрат максимально упростим в решаемой задаче процессы, связанные с составлением матричного уравнения. Наиболее естественным подходом, упрощающим решение задач, является использование матричной симметрии. За счет этого время, потраченное на составление матрицы, можно сократить в два раза. Значительно сокращается время составления матрицы при использовании внутренней симметрии матричных элементов. Матрица, полученная по алгоритму метода Галеркина, является теплицевой. Субиерархический подход в подобных задачах позволяет избавиться от повторного счета матричных элементов и использовать элементы ранее насчитанной матрицы. Еще один подход при минимизации временных затрат связан с использованием параллельных вычислений. В представленной задаче каждый элемент матрицы формируется независимо друг от друга, поэтому можно рассчитать элементы матрицы на нескольких процессорах или кластере.

Результаты счета

В работе представлены результаты счета модулей решений интегрального уравнения (7) на экране сложной конфигурации. Форма экрана представлена на рис. 1. Данный экран получен из сетки размером $10\times10\times10$. На графиках (рис. 2–4) форма экрана располагается в центральной части рисунка. Слева и справа от экрана представлены значения поверхностных токов. Слева вид сверху, справа вид с боку.

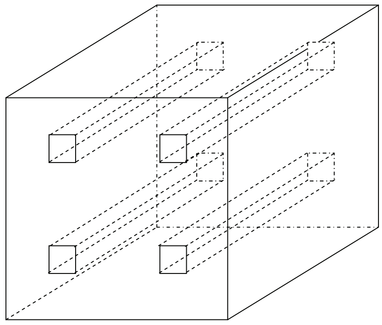

Рис. 1. Геометрия экрана

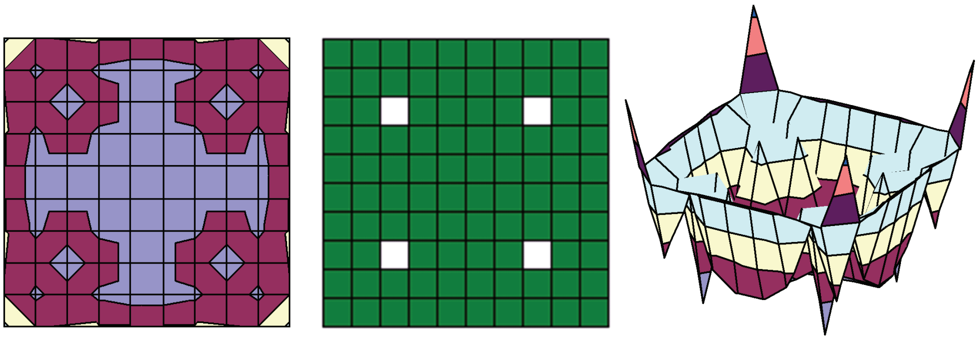

Рис. 2. Нулевое сечение, перпендикулярное оси *OZ* (модуль решения)

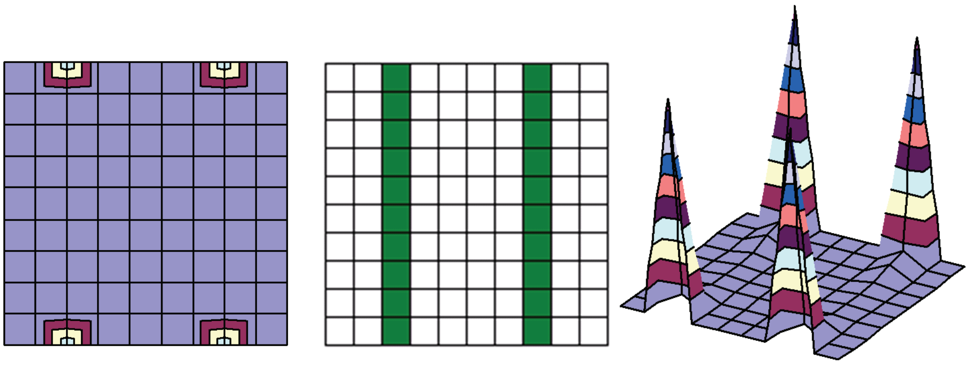

Рис. 3. Второе сечение, перпендикулярное оси *OY* (модуль решения)

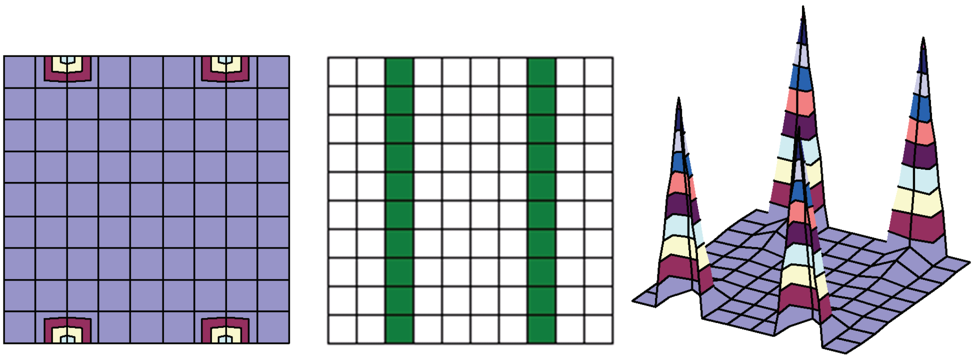

Рис. 4. Второе сечение перпендикулярное оси *OX* (модуль решения)

Список литературы

1. **Медведик, М. Ю.** Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.
2. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм и сходимость метода Галеркина в задачах дифракции электромагнитного поля на плоском экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2004. – № 5. – С. 3–19. – (Естественные науки).
3. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения интегрального уравнения на плоских экранах произвольной формы / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4. – С. 49–55.
4. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т 6. – № 4. – С. 1–6.
5. **Stephan, E. P.** Boundary Integral Equation for Screen Problem in R^3 / E. P. Stephan, Boundary // Integral Equation and Operator Theory. – 1987. – V. 10. – P. 236–257.
6. **Päivärinta, L.** Corner singularities of solution to in two $\Delta^{\pm 1/2}u = f$ dimensions / L. Päivärinta, S. Rempel. // Asymptotic Analysis. – 1992. – V. 5. – P. 429–460.
7. **Penzel, F.** Space Methods For The Laplace Equation In The Exterior Of The Disk / F. Penzel, Sobolev // Integral Equations and Operator Theory. – 1993. – V. 17.
8. **Andersson, T.** Method of moments and the use of multipole expansion / T. Andersson. – Lund : Lund Institute of Technology, Sweden, 1990.

Медведик Михаил Юрьевич
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

Medvedik Mikhail Yuryevich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

E-mail: _medv@mail.ru

УДК 519.642

Медведик, М. Ю.

Субиерархический метод решения интегрального уравнения на поверхностях произвольной формы / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 88–94.